Theoretische Grundlagen

Zusammenfassung des physikalischen Hintergrundwissens zum

Thema: Leichtathletik: Speerwurf

Schiefer Wurf

Der schiefe Wurf ist ein Bewegungsvorgang, bei dem ein Körper horizontale (v_x) und vertikale (v_y) Geschwindigkeit besitzt. Die resultierende Geschwindigkeit beider Komponenten wird als Vektor $\vec{v}$ bezeichnet. Alle Größen mit Index „0“ beziehen sich auf den Zeitpunkt des Abflugs. Der Abflugwinkel wird α_0 genannt.

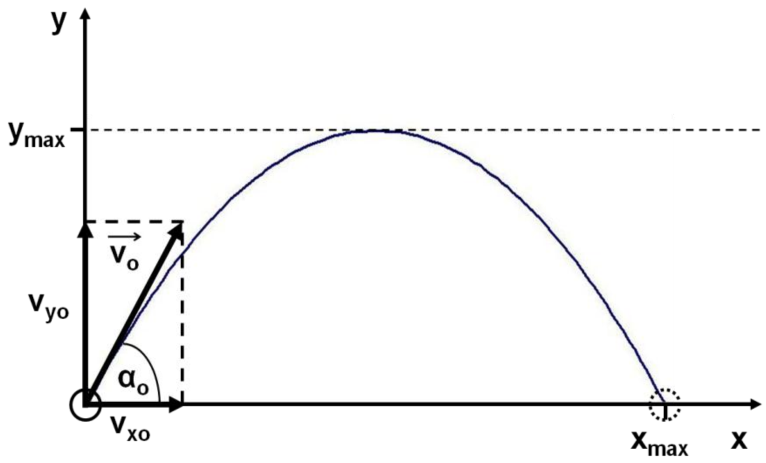

Abb. 1: Der schiefe Wurf

Mathematische Zusammenhänge

Die Abfluggeschwindigkeit $\overrightarrow{v_0}$ hat den Betrag: $v_0 = \sqrt{{v_{x_0}}^2 + {v_{y_0}}^2}$

[Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck aus v_0, v_{x_0} und v_{y_0}]

Horizontale Geschwindigkeit : $v_{x_0} = v_0 cos(\alpha_0)$ [Winkelfunktion: $cos(\alpha_0) = \frac{v_{x0}}{v_0}$]

Vertikale Geschwindigkeit: $v_{y_0} = v_0 sin(\alpha_0)$ [Winkelfunktion: $sin(\alpha_0) = \frac{v_{y0}}{v_0}$]

Flugdauer, Flugweite

Für den zurückgelegten Weg s eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit v gilt allg.:

$$s = v \cdot t$$

In y-Richtung erfährt der Ball die Erdbeschleunigung g. Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt allgemein:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

Für die zeitliche Entwicklung der y-Koordinate des Balls $y(t)$ gilt:

$$y(t) = v_{y_0} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Es handelt sich um eine Überlagerung aus einer gleichförmigen Bewegung nach oben $[s = v \cdot t]$ und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung nach unten $\left[s = \frac{1}{2} g t^2\right]$.

Den Zeitpunkt der Landung erhält man durch die Bedingung $y(t) = 0$.

Es folgt:

$$t_{Landung} = \frac{2 v_{y_0}}{g} = \frac{2 v_0 sin(\alpha)}{g}$$

Berechnung der Flugweite x_{max}: Einsetzen von $t_{Landung}$ in $s = v_{x0} \cdot t$

$$\Rightarrow x_{max} = \frac{2}{g} \cdot v_{x0} \cdot v_{yo} = \frac{2\, v_0^2 \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \sin(\alpha_0)}{g}$$

Der ideale Abwurfwinkel für eine maximale Flugweite x_{max} lässt sich durch Untersuchung der Extremstellen von $x_{max}(\alpha_0)$ berechnen.

Intuitiv lässt sich der Winkel wie folgt begründen:

Die Flugweite wird bei vorgegebenem $\overrightarrow{v_0}$ maximal, wenn das Produkt aus v_{x0} und v_{yo} maximal wird, da $\frac{2}{g}$ vom Abwurfwinkel unabhängig ist.

Das Produkt ist, geometrisch interpretiert, der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten v_{x0} und v_{yo} und der Diagonalen $\overrightarrow{v_0}$ (vgl. Abb. 2).

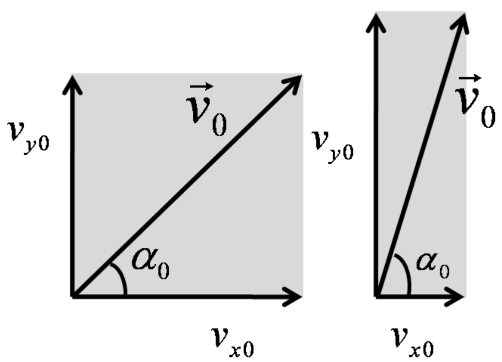

Abb. 2: Rechtecke mit gleicher Diagonale und verschiedenem Flächeninhalt

Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird bei vorgegebener Diagonale maximal, wenn es sich um ein Quadrat handelt; für den Winkel also gilt $\alpha_0 = 45°$. In Abb. 2 ist das linke Rechteck ein Quadrat, es hat den größeren Flächeninhalt.

Zusatz

Liegt die Abwurfhöhe oberhalb der Landehöhe, so wird die Flugweite vergrößert. Der Winkel für einen maximal weiten Flug ist dann kleiner als 45°. Beim Fußball wäre dies beispielsweise ein Abschlag in der Luft oder ein Kopfball.

Luftwiderstand

Die Wurfparabel beschreibt die theoretische, optimale Flugbahn, die ohne Reibungskräfte zustande kommt. In der Realität erfährt der Wurfgegenstand eine Widerstandskraft – den Luftwiderstand.

Für die quantitative Beschreibung des Luftwiderstandes gilt die Formel:

$$F_{LW} = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Der Luftwiderstand hängt von der Fläche des Gegenstandes A, der Dichte der Luft ρ, dem Luftwiderstandsbeiwert c_w und der Geschwindigkeit v ab. Die Flugbahn ist dann keine Parabel mehr, sondern eine ballistische Kurve.

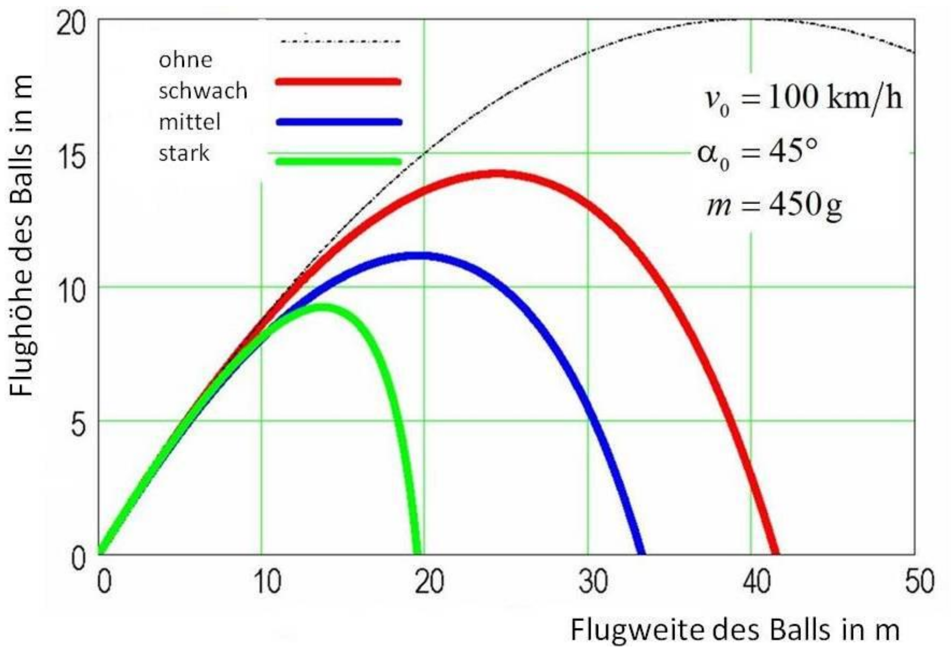

Abb. 3: ballistische Kurve eines Fußballs bei starker, mittlerer, schwacher und ohne Dämpfung

Dynamischer Auftrieb

Der dynamische Auftrieb wird durch die Auftriebsfläche (A), die Anströmgeschwindigkeit (v), die Dichte des Mediums (ρ) und dem Auftriebsbeiwert (c_A) beschrieben. Der Auftriebsbeiwert ist von der Form, der Oberfläche und dem Anstellwinkel des Körpers abhängig.

Dynamischer Auftrieb: $F_D = \frac{1}{2} \cdot c_A \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$

Die Formel unterscheidet sich von der des Luftwiderstandes nur um den Auftriebsbeiwert c_A. Dies ist kein Zufall. Der dynamische Auftrieb ist lediglich die zur Strömungsrichtung vertikale Komponente der Luftwiderstandskraft unter Berücksichtigung der Form und Oberflächenbeschaffenheit der entsprechenden Angriffsfläche.

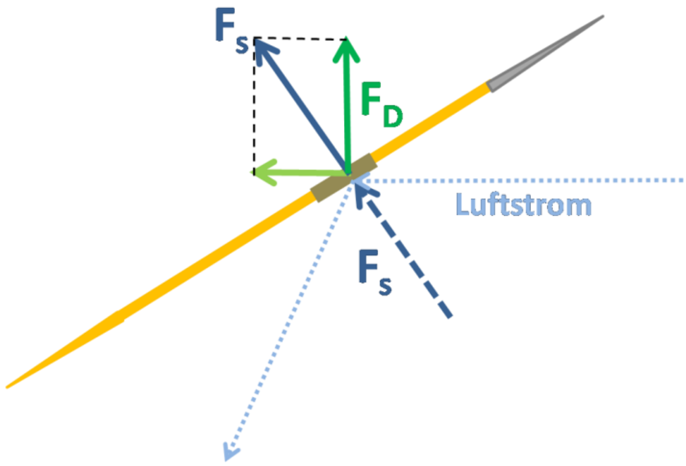

Abb. 4: Vereinfachte Darstellung des dynamischen Auftriebs eines fliegenden Speers

Abb. 4 zeigt das Zustandekommen der dynamischen Auftriebskraft F_D. Luft strömt den Speer horizontal an. Die Luftteilchen werden am Speer „reflektiert“, wodurch eine Kraft F_S senkrecht zum Speer entsteht. Die vertikale Komponente von F_S ist die dynamische Auftriebskraft F_D.

Man beachte jedoch, dass diese Modellierung stark vereinfacht ist. Sie gilt nur, wenn man den Speer als schmale, ebene Fläche betrachtet, an der der Luftstrom entsprechend reflektiert werden kann. Insbesondere der Luftwiderstandsbeiwert lässt sich damit nicht erklären.

